

Ecuaciones íntegro-diferenciales

Luis Silvestre

University of Chicago

Outline

Introducción

Procesos estocásticos con saltos

Ejemplos de ecuaciones no lineales

Aplicaciones

La ecuación de Boltzmann

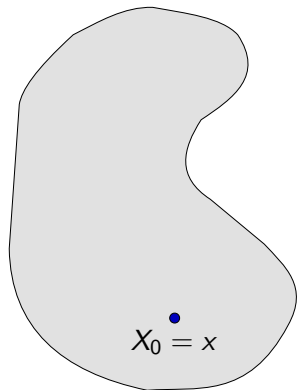
La ecuación de Muskat

Concepto de elipticidad uniforme

Definiciones naturales

Un problema

Un proceso con saltos



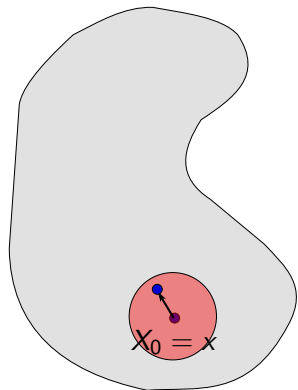
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



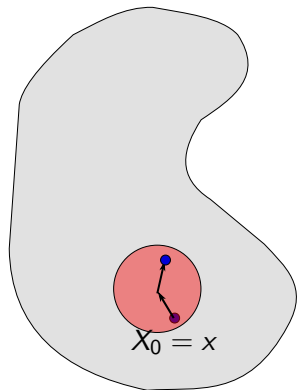
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



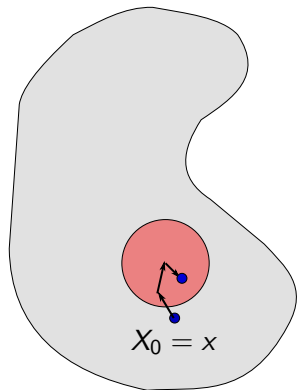
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



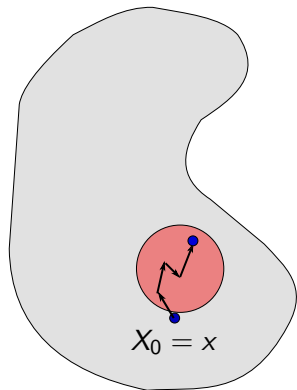
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



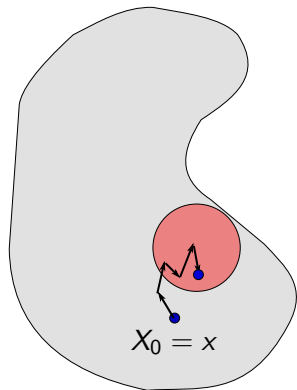
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



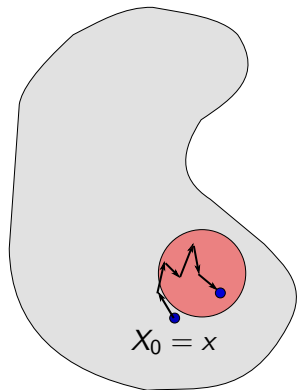
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



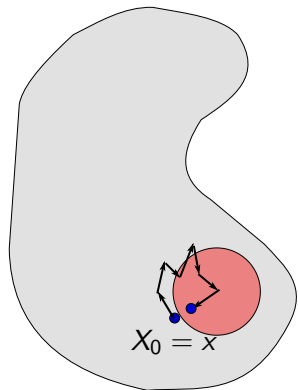
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



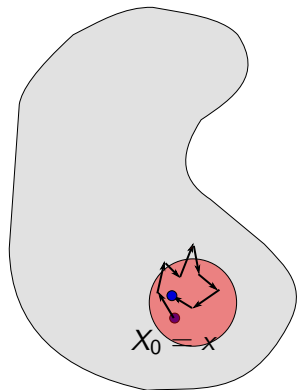
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



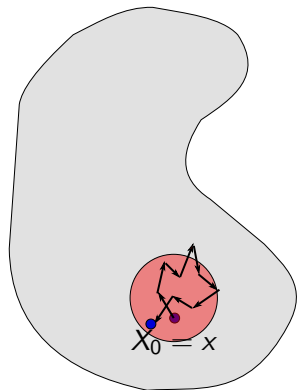
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



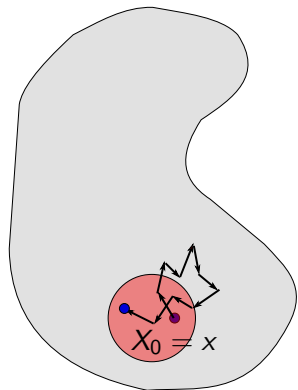
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



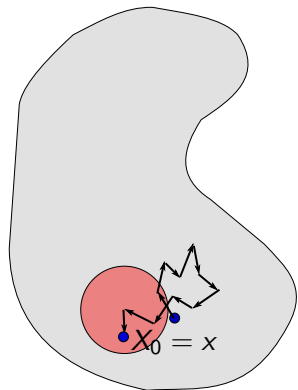
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



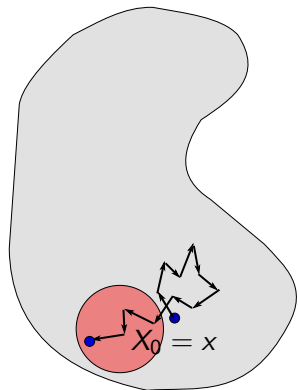
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



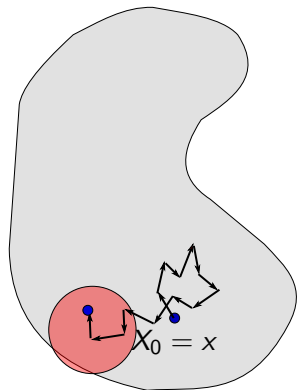
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



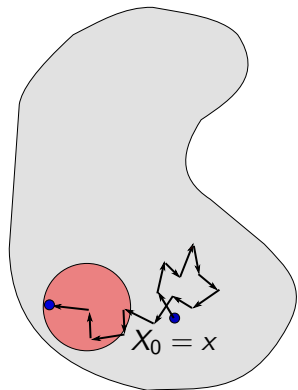
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



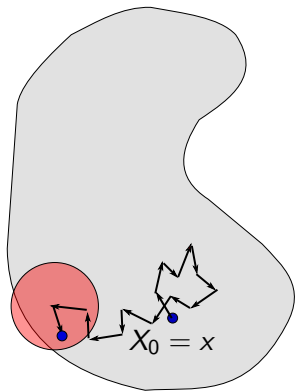
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



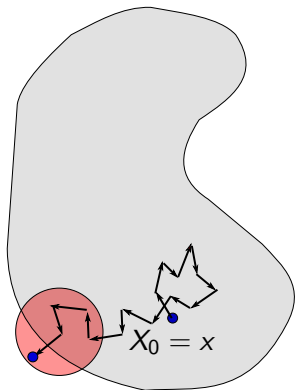
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



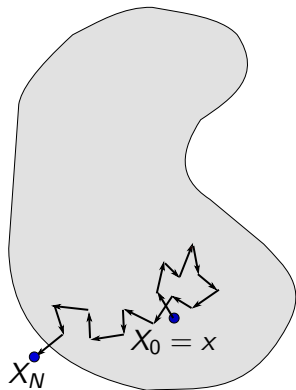
Consideremos siguiente paseo aleatorio.

El punto inicial está dado: $X_0 = x$.

En cada paso se elige el próximo punto X_{i+1} de manera uniforme en la bola de radio uno centrada en X_i .

Sea X_N el primer punto que se sale de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Un proceso con saltos



Dada una función $f : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sea

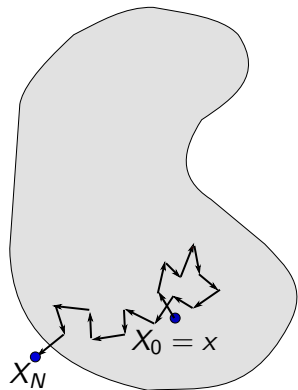
$$u(x) = \mathbb{E}[f(X_N)].$$

La función u satisface la ecuación,

$$u(x) = f(x) \quad , x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega,$$

$$u(x) = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x)} u(y) dy \quad , x \in \Omega.$$

Un proceso con saltos



Dada una función $f : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sea

$$u(x) = \mathbb{E}[f(X_N)].$$

La función u satisface la ecuación,

$$u(x) = f(x) \quad , x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega,$$
$$\int_{B_1(x)} (u(y) - u(x)) \, dy = 0 \quad , x \in \Omega.$$

Propiedades básicas de la ecuación

$$u(x) = f(x) \quad , x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega,$$
$$\int_{B_1(x)} (u(y) - u(x)) \, dy = 0 \quad , x \in \Omega.$$

- ▶ Se cumple el principio del máximo,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} f.$$

- ▶ Para cada f continua existe una única u que resuelve la ecuación.
- ▶ La función u se hace más regular hacia el interior de Ω .

Caso parabólico

Consideramos un proceso estocástico X_t . Ahora t es una variable continua. X_t salta de tanto en tanto siguiendo la misma distribución que antes. Los tiempos en que se producen los saltos se determinan por un proceso de Poisson de intensidad 1 .

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada, definimos

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(X_t)].$$

Esta función satisface la ecuación,

$$u_t(t, x) = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x)} (u(y) - u(x)) dy.$$

Caso parabólico

Consideramos un proceso estocástico X_t . Ahora t es una variable continua. X_t salta de tanto en tanto siguiendo una distribución K . Los tiempos en que se producen los saltos se determinan por un proceso de Poisson de intensidad 1 .

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada, definimos

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(X_t)].$$

Esta función satisface la ecuación,

$$u_t(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) K(y - x) dy.$$

Caso parabólico

Consideramos un proceso estocástico X_t . Ahora t es una variable continua. X_t salta de tanto en tanto siguiendo una distribución K . Los tiempos en que se producen los saltos se determinan por un proceso de Poisson de intensidad 1 .

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada, definimos

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(X_t)].$$

Esta función satisface la ecuación,

$$u_t(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x))K(y - x) dy.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(y) dy = 1, \quad K \geq 0.$$

Caso parabólico

Consideramos un proceso estocástico X_t . Ahora t es una variable continua. X_t salta de tanto en tanto siguiendo una distribución K . Los tiempos en que se producen los saltos se determinan por un proceso de Poisson de intensidad κ .

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada, definimos

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(X_t)].$$

Esta función satisface la ecuación,

$$u_t(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x))K(y - x) dy.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(y) dy = \kappa, \quad K \geq 0.$$

Caso parabólico

Consideramos un proceso estocástico X_t . Ahora t es una variable continua. X_t salta de tanto en tanto siguiendo una distribución K . Los tiempos en que se producen los saltos se determinan por una superposición de procesos de Poisson.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada, definimos

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(X_t)].$$

Esta función satisface la ecuación,

$$u_t(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x))K(y - x) dy.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(y) dy = +\infty, \quad K \geq 0.$$

Operadores elípticos clásicos

Los operadores diferenciales elípticos clásicos son casos límite de operadores íntegro-diferenciales.

$$\Delta u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x)) K_r(y - x) \, dy,$$

donde

$$K_r(y) = \frac{c_n}{r^{n+2}} \mathbb{1}_{B_r}(y).$$

(y de muchas otras maneras más)

Operadores que satisfacen el principio del máximo

Theorem (Courrege 1965)

Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ un operador tal que,

$$u(x_0) = \max_{\mathbb{R}^n} u \longrightarrow Lu(x_0) \leq 0.$$

Entonces L tiene la siguiente forma

$$Lu = \operatorname{tr}(A(x)D^2u) + b(x) \cdot \nabla u + \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) - u(x) - y \cdot \nabla u(x) \mathbb{1}_{B_1}(y)) K(x,y) dy.$$

1. Diffusion part: $A(x)$ es una matriz definida positiva
2. Drift part: $b(x)$ es un campo vectorial cualquiera.
3. Jump part: $K(x,y) \geq 0$ y $\int K(x,y) \min(1, |y|^2) dy < +\infty$.

Operadores que satisfacen el principio del máximo

Theorem (Courrege 1965)

Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ un operador tal que,

$$u(x_0) = \max_{\mathbb{R}^n} u \longrightarrow Lu(x_0) \leq 0.$$

Entonces L tiene la siguiente forma

$$Lu = \operatorname{tr}(A(x)D^2u) + b(x) \cdot \nabla u + \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) - u(x) - y \cdot \nabla u(x) \mathbb{1}_{B_1}(y)) K(x,y) dy.$$

1. *Diffusion part: $A(x)$ es una matriz definida positiva*
2. *Drift part: $b(x)$ es un campo vectorial cualquiera.*
3. *Jump part: $K(x,y) \geq 0$ y $\int K(x,y) \min(1, |y|^2) dy < +\infty$.*

Operadores que satisfacen el principio del máximo

Theorem (Courrege 1965)

Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ un operador tal que,

$$u(x_0) = \max_{\mathbb{R}^n} u \longrightarrow Lu(x_0) \leq 0.$$

Entonces L tiene la siguiente forma

$$Lu = \operatorname{tr}(A(x)D^2u) + b(x) \cdot \nabla u + \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) - u(x) - y \cdot \nabla u(x) \mathbb{1}_{B_1}(y)) K(x,y) dy.$$

1. *Diffusion part:* $A(x)$ es una matriz definida positiva
2. *Drift part:* $b(x)$ es un campo vectorial cualquiera.
3. *Jump part:* $K(x,y) \geq 0$ y $\int K(x,y) \min(1, |y|^2) dy < +\infty$.

Operadores que satisfacen el principio del máximo

Theorem (Courrage 1965)

Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ un operador tal que,

$$u(x_0) = \max_{\mathbb{R}^n} u \longrightarrow Lu(x_0) \leq 0.$$

Entonces L tiene la siguiente forma

$$Lu = \operatorname{tr}(A(x)D^2u) + b(x) \cdot \nabla u + \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) - u(x) - y \cdot \nabla u(x) \mathbb{1}_{B_1}(y)) K(x,y) dy.$$

1. *Diffusion part:* $A(x)$ es una matriz definida positiva
2. *Drift part:* $b(x)$ es un campo vectorial cualquiera.
3. *Jump part:* $K(x,y) \geq 0$ y $\int K(x,y) \min(1, |y|^2) dy < +\infty$.

Ecuaciones parabólicas no locales

$$u_t(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(t, y) - u(t, x))K(t, x, y) dy.$$

- ▶ $K \geq 0 \implies$ principio del máximo \implies unicidad de soluciones.
- ▶ A veces la ecuación regulariza el dato inicial. Idea: la ecuación empuja los valores de $u(x)$ para equipararse con el promedio de sus vecinos.
- ▶ La solución va a ser más regular que el dato inicial cuando este efecto sea uniforme en todas las escalas.

Ecuaciones parabólicas no locales

$$u_t(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(t, y) - u(t, x))K(t, x, y) dy.$$

- ▶ $K \geq 0 \implies$ principio del máximo \implies unicidad de soluciones.
- ▶ A veces la ecuación regulariza el dato inicial. Idea: la ecuación empuja los valores de $u(x)$ para equipararse con el promedio de sus vecinos.
- ▶ La solución va a ser más regular que el dato inicial cuando este efecto sea uniforme en todas las escalas.

La ecuación del calor fraccionaria

$$u_t(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(t, y) - u(t, x)) |y - x|^{-n-2s} dy.$$

Notar que

$$(-\Delta)^s u(x) = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x) - u(y)) |y - x|^{-n-2s} dy.$$

$$\widehat{(-\Delta)^s u}(\xi) = |\xi|^{2s} \hat{u}(\xi).$$

El núcleo $K(y) = |y|^{-n-2s}$ no es integrable. La integral es clásica si $s < 1/2$ y se entiende como valor principal si $1/2 \leq s < 1$.

Un operador íntegro-diferencial es elíptico de orden $2s$ cuando $K(y) \approx |y|^{-n-2s}$.

La ecuación del calor fraccionaria

$$u_t(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(t, y) - u(t, x)) |y - x|^{-n-2s} dy.$$

Notar que

$$(-\Delta)^s u(x) = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x) - u(y)) |y - x|^{-n-2s} dy.$$

$$\widehat{(-\Delta)^s u}(\xi) = |\xi|^{2s} \hat{u}(\xi).$$

El núcleo $K(y) = |y|^{-n-2s}$ no es integrable. La integral es clásica si $s < 1/2$ y se entiende como valor principal si $1/2 \leq s < 1$.

Un operador íntegro-diferencial es elíptico de orden $2s$ cuando $K(y) \approx |y|^{-n-2s}$.

Teoría de ecuaciones no locales

Infinidad de resultados para ecuaciones elípticas y parabólicas se extienden a ecuaciones íntegro-diferenciales, lineales y no lineales.

Algunos de los temas comunes son

- ▶ Existencia y unicidad de soluciones.
- ▶ Regularidad de las soluciones.
- ▶ Estimaciones a priori.
- ▶ Desigualdad de Harnack.
- ▶ Comportamiento cuando $t \rightarrow +\infty$.
- ▶ Límites asintóticos.
- ▶ Muchos etcéteras.

Aplicaciones

- ▶ **Procesos estocásticos discontinuos**
 - ▶ **Matemática financiera:** libro de R. Cont and P. Tankov.
 - ▶ **Física:** ver artículos de R. Metzler and J. Klafter.
- ▶ **Electroestática no local.** Aplicaciones al cálculo de atraques entre proteínas estudiada por un grupo en ZBI incluyendo a A. Hildebrandt, R. Blossey, S. Rjasanow, O. Kohlbacher, H.P. Lenhof.
- ▶ **Procesamiento de imágenes.** Incluyendo el trabajo de S. Osher, P. Guidotti, etc...
- ▶ **Ecuaciones de fluidos.** Por ejemplo la ecuación quasi-geostrófica o el problema de Muskat.
- ▶ **Problemas de mecánica estadística.** La ecuación de Boltzmann.
- ▶ **Geometría conforme.** Incluyendo el trabajo de A. Chang, M. Gonzalez
- ▶ **El operador Dirichlet to Neumann.**

La ecuación de Boltzmann

La función $f(x, v, t)$ representa la densidad de partículas de un gas

$$f_t + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f).$$

El término $Q(f, f)$ es no-local y está dado por la expresión

$$Q(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(f(v'_*) f(v') - f(v_*) f(v) \right) B(|v - v_*|, \theta) d\sigma dv_*.$$

Es una expresión (algo complicada) que viene de la interacción entre las partículas del gas. Hay varias posibles funciones B dependiendo del modelo.

Interacción entre partículas

$$Q(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(f(v'_*)f(v') - f(v_*)f(v) \right) B(|v - v_*|, \theta) d\sigma dv_*.$$

K_f es un núcleo que depende de f a partir de una fórmula integral (también algo complicada).

b es una función fija que se calcula en función de B .

Interacción entre partículas

$$Q(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(f(v'_*)f(v') - f(v'_*)f(v) \right) B(|v - v_*|, \theta) \\ \left(f(v'_*)f(v) - f(v_*)f(v) \right) B(|v - v_*|, \theta) d\sigma dv_*.$$

K_f es un núcleo que depende de f a partir de una fórmula integral (también algo complicada).

b es una función fija que se calcula en función de B .

Interacción entre partículas

$$Q(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(f(v'_*)f(v') - f(v'_*)f(v) \right) B(|v - v_*|, \theta) \\ \left(f(v'_*)f(v) - f(v_*)f(v) \right) B(|v - v_*|, \theta) d\sigma dv_*.$$

K_f es un núcleo que depende de f a partir de una fórmula integral (también algo complicada).

b es una función fija que se calcula en función de B .

Interacción entre partículas

$$Q(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(f(v') - f(v) \right) f(v'_*) B(|v - v_*|, \theta) \\ f(v) \left(f(v'_*) - f(v_*) \right) B(|v - v_*|, \theta) d\sigma dv_*.$$

K_f es un núcleo que depende de f a partir de una fórmula integral (también algo complicada).

b es una función fija que se calcula en función de B .

Interacción entre partículas

$$Q(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(f(v') - f(v) \right) f(v'_*) B(|v - v_*|, \theta) d\sigma dv_* \\ + f(v) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(f(v'_*) - f(v_*) \right) B(|v - v_*|, \theta) d\sigma dv_*.$$

K_f es un núcleo que depende de f a partir de una fórmula integral (también algo complicada).

b es una función fija que se calcula en función de B .

Interacción entre partículas

$$Q(f, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(f(v') - f(v) \right) K_f(v, v') \, dv' \\ + f(v)(b * f).$$

K_f es un núcleo que depende de f a partir de una fórmula integral (también algo complicada).

b es una función fija que se calcula en función de B .

Los dos términos

El primer término

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(v') - f(v) \right) K_f(v, v') \, dv'$$

Es un operador íntegro-diferencial. Tiene la forma exacta que discutimos antes. El núcleo K_f depende del valor de la solución f (la ecuación es no lineal).

El segundo término

$$f(v)(b * f)$$

Es un término cuadrático de menor orden.

Usando teoremas genéricos sobre ecuaciones íntegro-diferenciales se pueden derivar estimaciones de regularidad sobre la ecuación de Boltzmann (pero lleva trabajo).

Los dos términos

El primer término

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(v') - f(v) \right) K_f(v, v') \, dv'$$

Es un operador íntegro-diferencial. Tiene la forma exacta que discutimos antes. El núcleo K_f depende del valor de la solución f (la ecuación es no lineal).

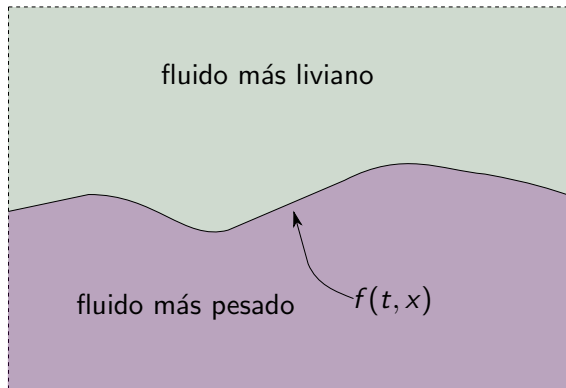
El segundo término

$$f(v)(b * f)$$

Es un término cuadrático de menor orden.

Usando teoremas genéricos sobre ecuaciones íntegro-diferenciales se pueden derivar estimaciones de regularidad sobre la ecuación de Boltzmann (pero lleva trabajo).

El problema de Muskat



La interfaz $y = f(t, x)$ entre dos fluidos de distintas densidades sigue una ecuación íntegro-diferencial no lineal de orden uno. En este caso, para que sea parabólica el fluido más pesado tiene que estar del lado de abajo.

Ecuaciones parabólicas clásicas

Una ecuación parabólica en formato divergencia tiene la forma

$$u_t = \operatorname{div}[A(t, x)\nabla u].$$

La condición de *parabolicidad uniforme* es que para todo t y x ,

$$\lambda I \leq A(t, x) \leq \Lambda I.$$

Este tipo de ecuaciones está muy estudiado, incluyendo resultados famosos de De Giorgi y Nash sobre regularidad de soluciones y la desigualdad de Harnack.

Operadores elípticos de orden 2

El operador $Lu = \operatorname{div}[A(t, x)\nabla u]$ es autoadjunto en el sentido que

$$\int_{\mathbb{R}^n} Lu v \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u Lv \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{ij} A_{ij}(x) \partial_i u(x) \partial_j v(x) \, dx.$$

La condición $\lambda I \leq A(t, x) \leq \Lambda I$ nos dice que

$$- \int_{\mathbb{R}^n} Lu u \, dx \approx \|u\|_{\dot{H}^1}^2 = \int |\nabla u|^2 \, dx.$$

Operadores elípticos de orden $2s$ (con $s \in (0, 1)$)

Consideremos el operador íntegro-diferencial

$$Lu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(y) - u(x))K(x, y) dy.$$

El operador L es autoadjunto cuando $K(x, y) = K(y, x)$.

Si asumimos $\lambda|x - y|^{-n-2s} \leq K(x, y) \leq \Lambda|x - y|^{-n-2s}$, tenemos

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^n} Lu u dx &= \frac{1}{2} \iint |u(x) - u(y)|^2 K(x, y) dx dy, \\ &\approx \|u\|_{\dot{H}^s}^2 = \iint \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy, \\ &= c \int |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Desigualdad de Harnack

Teorema

Consideremos un núcleo K tal que $K(x, y) = K(y, x)$ y $\lambda|x - y|^{-n-2s} \leq K(x, y) \leq \Lambda|x - y|^{-n-2s}$. Sea $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

- ▶ $u \geq 0$ en todo \mathbb{R}^n .
- ▶ Para todo $x \in B_2$,

$$\int (u(y) - u(x))K(x, y) dy = 0.$$

Entonces

$$\frac{\text{máx}}{B_1} u \leq C \frac{\text{mín}}{B_1} u,$$

para una constante C que depende solamente de n , λ , Λ y s .

- ▶ Es una versión cuantitativa del principio del máximo fuerte.
- ▶ Implica estimaciones de Hölder.
- ▶ No requiere ninguna hipótesis de regularidad de K con respecto a x o y .

La condición $\lambda|x - y|^{-n-2s} \leq K(x, y) \leq \Lambda|x - y|^{-n-2s}$ es demasiado restrictiva para algunas aplicaciones (p.ej. Boltzmann).

Pregunta

Podemos encontrar condiciones más generales que garanticen la siguiente relación?

$$\iint |u(y) - u(x)|^2 K(x, y) \, dy \, dx \approx \iint \frac{|u(y) - u(x)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \, dy \, dx.$$

Nota. $a \approx b$ quiere decir que existe una constante universal C tal que $a \leq Cb$ y $b \leq Ca$.

Cota por arriba

La condición $K(x, y) \leq \Lambda|x - y|^{-n-2s}$ se puede reemplazar por

$$\text{para todo } x \in \mathbb{R}^n, r > 0, \quad \int_{B_r(x)} |y - x|^2 K(x, y) \, dy \leq \Lambda r^{2-2s}.$$

Con esta hipótesis,

$$\iint |u(y) - u(x)|^2 K(x, y) \, dy \, dx \leq C \iint \frac{|u(y) - u(x)|^2}{|x - y|^{n+2s}} \, dy \, dx,$$

para una constante C que depende de n, s y Λ solamente.

Cota por abajo

La condición $\lambda|x - y|^{-n-2s} \leq K(x, y) \leq \Lambda|x - y|^{-n-2s}$ se puede reemplazar por

- ▶ Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$,

$$\int_{B_r(x)} |y - x|^2 K(x, y) dy \leq \Lambda r^{2-2s}.$$

- ▶ Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $|e| = 1$, $r > 0$,

$$\int_{B_r(x)} (e \cdot (y - x))_+^2 K(x, y) dy \geq \lambda r^{2-2s}.$$

Conjetura

Si K es un núcleo simétrico con las hipótesis de arriba,

$$\iint |u(y) - u(x)|^2 K(x, y) dy dx \approx \iint \frac{|u(y) - u(x)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx,$$